第 27 卷第 1 期 计 算 技 术 与 自 动 化 Vol. 27 ,No. 1
2 0 0 8 年 3 月 Computing Technology and Automation Mar. 2 0 0 8

文章编号:1003 - 6199(2008)01 - 0012 - 04

一类时滞切换系统的鲁棒控制

陈　娜,杨延烁,张霄力

(厦门大学 自动化系,福建 厦门　361005)

摘　要:研究一类状态矩阵和控制输入矩阵同时具有不确定项的线性时滞切换系统的鲁棒控制器的设计问题。利用多 Lyapunov 函数方法设计出状态反馈的鲁棒控制器,并设计出切换策略,证明闭环系统在给定的切换策略下在其平衡点处的渐近稳定性。最后通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱进行仿真,仿真结果验证结论的有效性。

关键词:切换系统;时滞;多 Lyapunov 函数;状态反馈;鲁棒控制

中图分类号:TP273　　　　**文献标识码**:A

Dobust Control for a Class of Switched Systems with Time - delay

CHEN Na , YANG Yan-shuo ZHANG Xiao-li

(Department of Automation ,Xiamen University ,Xiamen　361005 ,China)

Abstract : The problem of robust controll for a class of switched system with time - delay is considered. A kind of robust state - feedback controller is constructed by using multiple Lyapunov function method , the switching strategy is also designed. With the given switching laws , the controllers guarantee that the states of closed - loop systems asymptotically converge to equilibrium point. The simulation shows the validity of the result.

Key words :switched system ;time - delay ;multiple lyapunov function ;state ;feedback

1　引　言

切换系统作为一类重要的混杂系统得到了广泛的研究和发展,系统的稳定性分析和控制器的设计也得到了越来越广泛的关注。目前已经有不少关于这方面的研究结果[1 - 5]。其中文献[4]给出了切换系统在一定的切换策略下的稳定性的判别条件以及构造切换系统的切换策略来镇定切换系统的方法,并且首先提出了多 Lyapunov 函数方法。

现在实际工程系统中,时滞现象是普遍存在的,如电力系统、通信系统、机械传输系统等。时滞的存在经常导致系统的不稳定,所以在出现时滞的情况下,如何保证系统稳定地工作是一个很重要的研究问题。近些年来,对于具有时滞的切换系统这方面的研究不多[6 - 9],文[8]针对一类具有状态延迟的连续线性切换系统,研究了其渐近稳定性及状态反馈和输出反馈镇定控制律的设计问题。文章利用公共李亚普诺夫函数法给出了系统渐近稳定的充分条件及该条件下切换律的构造方法,然后给出了状态反馈和输出反馈镇定的充分条件,同时给出了稳定化控制律的参数化表示和相应切换律的构造方法。文章没有考虑外部扰动和带有不确定项的情况。本文主要研究了一类状态矩阵和控制输入矩阵同时具有不确定项的线性时滞切换系统的鲁棒控制器的设计问题。利用多 Lyapunov 函数方法设计出状态反馈的鲁棒控制器,并设计出切换策略。本文研究的外部扰动与通常的扰动在形式上存在较大差异,是又一类重要的扰动,对单个子系统来说是不满足匹配条件的,但是从整个切换系统来说又类似于匹配条件。

收稿日期:2007 - 12 - 20
基金项目:福建省青年科技人才创新项目(2005J006)
作者简介:陈　娜(1980 —),女,河南正阳人,硕士研究生,研究方向:切换系统的稳定性和鲁棒性(E - mail:zycn0827 @yahoo. com. cn);张霄力(1970 —),男,河北唐县人,副教授,博士,研究方向:混合系统、切换系统的稳定性等。

2　问题的描述

考虑下面一类时滞切换系统

$$\dot{x} = (A_i + \Delta A_i)x + M_i x(t-\tau) + B_i(I+E_i)u_i + HW(x) \tag{1}$$

其中:$i \in N = \{1,2,\cdots,m\}$,$x \in R^n$,$u \in R^r$,分别是系统的状态变量和控制输入。常数 $\tau > 0$ 为时间滞后量。A_i,B_i 分别是第 i 个子系统的状态矩阵和输入增益矩阵,具有相应的维数。ΔA_i 为第 i 个子系统的结构不确定性,E_i 是第 i 个子系统的输入不确定性,M_i 是时滞矩阵,$W(x)$ 是外部干扰,H 是具有相应维数的矩阵。

我们的目的是设计各子系统的状态反馈控制器 u_i 以及确定切换策略 $\sigma(x)$,使闭环系统在其平衡点处是渐近稳定的。引用符号:$\|(\cdot)\|$ 表示向量或是矩阵的欧氏范数。

对于设计状态反馈控制器作如下的假设:

假设 1　系统的结构不确定性满足 $\Delta A_i = D_i F_i(t) G_i$,其中 D_i、G_i 为适当维数的常值矩阵,$F_i(t)$ 是适当维数的未知矩阵,且满足 $F_i^T(t)F_i(t) \le I$。

假设 2　存在非负常数 η_i,使得系统输入通道不确定项满足 $\|E_i\| \le \eta_i$。

假设 3　存在 m 个常数 λ_i,使得 $H = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i$。

假设 4　对于外部干扰 $W(x)$,存在一非负连续函数 $\theta(x)$,使下列不等式成立 $\|W(x)\| \le \theta(x)$,且 $\theta(0) = 0$,$\theta(x)$ 是连续函数。

引理[1]　对于任意适当维数矩阵 X 和 Y 和常数 $\zeta > 0$,有下式成立:

$$X^TY + Y^TX \le \zeta X^Tx + \zeta^{-1}Y^TY$$

3　主要结果

定理　如果存在正定矩阵 P_i 和 Q,且存在同时非负或存在同时非正的实数 ε_{ij},使得矩阵不等式组

$$R_i = \begin{bmatrix} A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q + \sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}(P_i - P_j) & P_iM_i \\ M_i^TP_i & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{2}$$

对 $\forall i \in N = \{1,2,\cdots,m\}$ 都成立,那么可以构造控制器 u_i 和切换策略 $\sigma(x)$ 使得系统可经状态反馈镇定。

其中控制器

$$u_i = \begin{cases} s, & \|B_iP_ix\| \ne 0; \\ 0, & \text{所有 } \|B_jP_ix\| \text{ 全为 } 0, j \in N. \end{cases} \tag{3}$$

$$s = -\frac{1}{1-\eta_i}\left[\frac{\lambda_i\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|} + \sum_{j\ne i}\frac{\lambda_j\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|^2} \times \|B_j^TP_ix\|\right]$$

切换策略

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} \min\{\arg[\max(x^TP_ix)]\} & \varepsilon_{ij} \ge 0 \\ \min\{\arg[\min(x^TP_ix)]\} & \varepsilon_{ij} \le 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中函数

$\arg(\cdot)$ 表示满足括号内表达式条件下的下标值。

证明　对系统(1) 构造如(3) 式的状态反馈控制器,考虑系统(1) 和控制器(3) 组成的闭环系统

$$\dot{x} = (A_i + \Delta A_i)x + M_i x(t-\tau) + B_i(I+E_i)u_i + HW(x) \tag{5}$$

情形 1　当 $\varepsilon_{ij} \ge 0$ 时,对于系统(5) 选取切换策略(4),对于 $\forall x \in R^n/\{0\}$,比较 x^TP_jx 值之间的大小$(j \in N)$,不妨设其中最大的一个为 x^TP_ix,则

$$x^TP_ix - x^TP_jx = x^T(P_i - P_j)x \ge 0$$

令 $\Theta_i = \{x \in R^n \setminus \{0\} \mid x^T(P_i - P_j)x \ge 0, \forall j \in N\}$,显然有 $\bigcup_{j=1}^{m}\Theta_j = R^n \setminus \{0\}$,设 $\tilde{\Theta}_1 = \Theta_1$,$\cdots$,$\tilde{\Theta}_i = \Theta_i - \bigcup_{j=1}^{i-1}\Theta_j$,$\cdots$,$\tilde{\Theta}_m = \Theta_m - \bigcup_{j=1}^{m-1}\Theta_j$ $(i = 1,\cdots,m)$,则

$$\tilde{\Theta}_i \cap \tilde{\Theta}_j = \phi, i \ne j。$$

当 $x \in \tilde{\Theta}_i$,切换到第 i 个子系统,构造 Lyapunov 函数

$$V_i(x) = x^TP_ix + \int_{t-\tau}^{t} x^T(s)Qx(s)\,ds$$

计算 Lyapunov 函数沿闭环系统(5) 轨迹的导数:

$$\dot{V}_i(x) = \dot{x}^TP_ix + x^TP_i\dot{x} + x^TQx - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)$$

$$= [(A_i + \Delta A_i)x + M_ix(t-\tau) + B_i(I+E_i)u_i + HW(x)]^TP_ix + x^TP_i[(A_i + \Delta A_i)x + M_ix(t-\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&+ B_i(I+E_i)u_i + HW(x)] \\
&+ x^TQx - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \qquad (6)\\
&= x^T(A_i^TP_i + P_iA_i + \Delta A_i^TP_i + P_i\Delta A_i)x \\
&+ x^T(t-\tau)M_iP_ix + x^TP_iM_ix(t-\tau) \\
&+ 2x^TP_iB_i(I+E_i)u_i + 2x^TP_iHW(x) \\
&+ x^TQx - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)
\end{aligned}
$$

由假设 1 和引理可得:

$$
\begin{aligned}
&P_i\Delta A_i + \Delta A_i^TP_i = P_iD_iF_i(t)G_i \\
&+ G_i^TF_i^TD_i^TP_i \\
&\le \zeta G_i^TF_i^TF_iG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i \\
&\le \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i \qquad (7)
\end{aligned}
$$

当 $\|B_iP_ix\| \ne 0$ 时,将假设条件和(3) 式代入得:

$2x^T(t)P_iB_iu_i$

$$
\begin{aligned}
&= -2x^TP_iB_i\frac{1}{1-\eta_i} \\
&\left[\frac{\lambda_i\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|} + \sum_{j\ne i}\frac{\lambda_j\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|^2}\times\|B_j^TP_ix\|\right] \\
&= \frac{1}{1-\eta_i}\left[-2\lambda_i\theta(x)\|B_i^TP_ix\| - \sum_{j\ne i}2\lambda_j\theta(x)\|B_j^TP_ix\|\right]
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

$2x^T(t)P_iB_iE_iu_i$

$$
\begin{aligned}
&= -2x^TP_iB_iE_i\frac{1}{1-\eta_i} \\
&\left[\frac{\lambda_i\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|} + \sum_{j\ne i}\frac{\lambda_j\theta(x)B_i^TP_ix}{\|B_i^TP_ix\|^2}\times\|B_j^TP_ix\|\right] \\
&= \frac{\eta_i}{1-\eta_i}\left[2\lambda_i\theta(x)\|B_i^TP_ix\| + \sum_{j\ne i}2\lambda_j\theta(x)\|B_j^TP_ix\|\right]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

$$
\begin{aligned}
&2x^T(t)P_iHW(x) \\
&= 2x^T(t)P_i\sum_{i=1}^{m}\lambda_iB_iW(x) \\
&\le 2\lambda_i\theta(x)\|B_i^TP_ix\| + \sum_{j\ne i}2\lambda_j\theta(x)\|B_j^TP_jx\|
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

式(8) (9) (10) 代入(6) 得:

$$
\begin{aligned}
&\dot V_i(x) \le x^T(A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i \\
&+ \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i)x + x^T(t-\tau)M_iP_ix \\
&+ x^TP_iM_ix(t-\tau) \\
&+ x^TQx - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \\
&= x^T(A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i \\
&+ \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q)x \\
&+ x^T(t-\tau)M_iP_ix + x^TP_iM_ix(t-\tau) \\
&- x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \\
&= \begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}^T \\
&\begin{bmatrix} A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q & P_iM_i \\ M_i^TP_i & -Q\end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由式(2) 可得

$$
\begin{bmatrix} A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q & P_iM_i \\ M_i^TP_i & -Q\end{bmatrix}
< -\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}(P_i - P_j) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix} A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q & P_iM_i \\ M_i^TP_i & -Q\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix} \\
&< -\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}(P_i - P_j) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因为 $x^TP_ix - x^TP_jx = x^T(P_i - P_j)x \ge 0$,那么

$$
-\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij}(P_i - P_j) & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix} \le 0
$$

由上可得

$$
\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix} A_i^TP_i + P_iA_i + \zeta G_i^TG_i + \zeta^{-1}P_iD_iD_i^TP_i + Q & P_iM_i \\ M_i^TP_i & -Q\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ x^T(t-\tau)\end{bmatrix} < 0
$$

即 $\dot V_i(x) < 0$,再利用多 Lyapunov 函数方法[4] 可知,系统(1) 是渐近稳定的。

当 $\|B_jP_ix\|$ 全为 0, $j \in N$ 时,同理可证 $\dot V_i(x) < 0$ 成立。

情形 2　当 $\varepsilon_{ij} \le 0$ 时,与情形一相似,同理可证 $\dot V_i(x) < 0$ 成立,从而使得系统(1) 是渐近稳定的。

4　仿真

考虑下面具有三个子系统的线性时滞切换系统的仿真

$$
\begin{aligned}
\dot x &= (A_i + \Delta A_i)x + M_ix(t-\tau) \\
&+ B_i(I+E_i)u_i + HW(x)
\end{aligned}
$$

其中 $i = 1,2,3$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 5 \\ 0 & -5.5 & 0.2 \\ -3 & -5 & -3.3\end{bmatrix}
$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-3.8 & 1.1 & 0.8\\ 1 & -3.5 & 0.3\\ 0.6 & 0 & -5.6\end{bmatrix}$$
$$A_3=\begin{bmatrix}-2 & -7 & -1\\ 0.3 & -6.5 & 0\\ 0.01 & 0.5 & -6\end{bmatrix}$$
$$M_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},M_2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1.5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$M_3=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -0.5\end{bmatrix}$$
$$D_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix},D_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.1\\ 0 & 1 & 0.2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$
$$D_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},G_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0.5\\ 0 & 0 & 1.5\end{bmatrix}$$
$$G_2=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & 1.5 & 0.5\\ 1 & 0 & 0.5\end{bmatrix},$$
$$G_3=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -0.5\end{bmatrix}$$
$$B_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\end{bmatrix}^T,B_2=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T,H=[3\quad 1\quad 4]^T$$
$$W_1=0.1\times\sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$W_2=0.2\times\sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$W_3=0.3\times\sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$E_1=\mathrm{diag}\{0.2\quad 0.3\quad 0.5\}$$
$$E_2=\mathrm{diag}\{0.2\quad 0.4\quad 0.2\}$$
$$E_3=\mathrm{diag}\{0.2\quad 0.1\quad 0.1\}$$

利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱,可以求得正定矩阵 P 与正常数 ζ:

$$P_1=\begin{bmatrix}16.7892 & 2.9025 & -2.9485\\ 2.9025 & 10.9874 & -5.5797\\ -2.9485 & -5.5797 & 11.5153\end{bmatrix}$$
$$P_2=\begin{bmatrix}13.7283 & -1.4087 & 2.6240\\ -1.4087 & 14.5756 & -1.7931\\ 2.6240 & -1.7931 & 7.5546\end{bmatrix}$$
$$P_3=\begin{bmatrix}5.9736 & -0.5013 & 0.5968\\ -0.5013 & 24.9359 & 0.3691\\ 0.5968 & 0.3691 & 7.5033\end{bmatrix}$$
$$\zeta=27.8689$$

给定初始条件 $x_0=[2\quad 1\quad 2]^T$,可得到系统状态反馈状态响应曲线如的图 1 所示(图 x_1,x_2,x_3 表示系统状态的三个分量)。

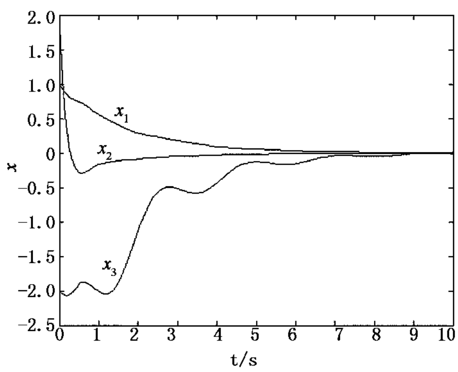

图 1　状态变量曲线图

5　结　论

本文考虑了一类状态矩阵和控制输入矩阵同时具有不确定项的线性时滞切换系统的鲁棒控制器的设计问题。利用多 Lyapunov 函数方法设计出状态反馈的鲁棒控制器,并设计出切换策略镇定系统。最后通过一个具有三个子系统的时滞切换系统的鲁棒镇定仿真例子,证明了结论是有效的。

参考文献

[1]　孙常春,刘玉忠. 一类带有扰动的不确定切换系统的鲁棒镇定[J]. 沈阳师范大学学报:自然科学版,2005,10:12 - 15.

[2]　SKAFIDASE, EVANS R J, SAVKIN A N, ET AL. Stability results for switched controller system [J]. Automatica,1999,35(4):553 - 564.

[3]　张霄力,范玉顺. 一类不确定线性切换系统的鲁棒控制器设计[J]. 清华大学学报,2004,44(1):126 - 129.

[4]　Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43(4): 475 - 482.

[5]　DAAFOUZ J, RIEDINGER P, IUNG C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47 (11) :1883 - 188.

[6]　孙洪飞,赵军,高晓东. 带有时滞摄动的线性切换系统的稳定性[J]. 控制与决策,2002,17(4):431 - 434.

[7]　周慧波,孙常春,刘玉忠. 一类不确定时滞切换系统的渐近稳定性[J]. 沈阳师范大学:自然科学版, 2005, 23(2): 116 - 119.

[8]　陈松林, 姚郁. 一类时滞线性切换系统的稳定性和镇定[J]. 黑龙江大学:自然科学学报, 2006, 23(2):206 - 210.

[9]　Wang Y. J, Xie G. M, Wang L. Controllability of switched time - delay systems under constrained switching [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 286(2):397 - 421.